

زينبمحمدى

سخنرانی ارائه شده در شانزدهمین کنفرانس ریاضی ایران (تابستان ۹۷_بابلسر) دبير رياضي دبير ستان شاهد الغدير فريدونكنار

چكىدە

توجه ویژه به مثالها، در افزایش توانمندی یادگیری و توســعهٔ مهارت حرفهای معلمان ریاضی، مفید و مؤثر است. کاربرد وســـيع مثالها از زمان دور، در متون رياضي ثبت شده و نشاندهندهٔ اهميت و اقبال عمومي، نسبت به درک مفاهیم از طریق مثالهای آشناست تا از این طریق، تجرید ریاضی ملموس شود. تعریفها کلی و انتزاعیاند و از آنها بهعنوان مرجع استفاده می شود، در صورتی که معناها عموماً به کمک مثال ها شکل می گیرند. معناهای عمیق، از طریق تمر کز بر ورزیدگی با مثال های آشنا بیرون می آیند و یادگیرندگان، از طریق مثال های ملموس، استنباط و تعمیم، مفاهیم را بازسازی می کنند. مثالها می توانند مانند ابزار تعادل فرهنگی بین یادگیرندگان و مفاهیم، یا نظریهها و تکنیکهای ریاضی باشند. ابزار مهمی برای ایجاد ارتباط با ایدههای انتزاعی ریاضی و ارتباطها و تبادلهای ریاضی یک فرد با خود و دیگران است. با توجه به اهمیتی که مثالها در جریان یاددهی ـ یادگیری ریاضی دارند، در این مقاله، چند طبقهبندی از مثال های ریاضی ارائه شدهاند.

کلیدواژهها: مثال آموزشی، تولید مثال، ردهبندی مثال

درک و تصور معلم ریاضی از مثال و آگاهی از جایگاه آن در آموزش و نیز مهارت او در ارائه و به کارگیری یک مثال آموزشی، یکی از عاملهای مهم و تأثیر گذار بر فرایند تدریس ریاضی است

مقدمه

یکے از روش ہای کلیدی برای دسترسى ممكن بەايدەھاي مجردرياضي و یا گاهی شهودی تر ساختن مفاهیم برای فراگیرندگان، استفاده از مدلهای متفاوت و متنوع ارائم مثالهاست [٧]. از این وسیلهٔ ارتباطی به منظور توضیح و بحث و گفتوگو در ریاضی استفاده میشود [۵]. . از طریق مثال، معلمها به دانش آموزان در تعمیم و ساخت درک خود از محتوای رياضي كمك ميكنند [۶]. زاسلاوسكي و **زودیک** (۲۰۰۷) استدلال میکنند که شناخت مثال، دانشی مهم و مورد نیاز در آموزش ریاضیات اســت، با این حال، أن را تعميم دهد، تعريف ميكنند. طبق این تعریف گسترده، مثالها میتوانند معلم های ریاضی، یا در دوران خدمت

و یا قبل از خدمت، به طور کامل با این دانش آشینا نمی شوند. فرض را بر این قرار میدهند که همهٔ معلمهای ریاضی از طريق تجربهٔ تدريس، قادر به ساختن دانش خـود در مثالهای ریاضی خواهند بود. با وجود این، همهٔ معلمها نمی توانند 🍷 اینکه دانش آموزان تا چه حد می توانند یک از تجربهٔ خود یاد بگیرند [۳و۴]. مثالها در آموزش ریاضی فقط به یک 🔵 بستگی دارد که معلمها مطرح می کنند [9₉8] • فرم از سؤال و یا مثالهای کار شده محدود نمی شوند، بلکه در بسیاری موارد بهعنوان توان تفکر مطرح هستند. **واتسون** و **میسون** (۲۰۰۵) در کتاب خود، *ریاضی* به عنوان یک فعالیت سازنده مثال ها را بهعنوان هرچه که یادگیرنده ممکن است

🔍 تقریباً در هر شــکلی، مانند چهره، تصویر كلامي، سؤال، حالت، تصوير پويا، مسئله و دیگر چیزها باشــند. هر شکل مثال که • معلمان از آنها استفاده می کنند، برای کمک به دانش آموزان در مورد تعمیم است. ایدهٔ ریاضیی را درک کنند، به مثالهایی

محتوای مثال و روش معلم، توجه دانشآم_وزان را به س_مت این محتوا در جهـت درک آن هدایـت خواهـد کرد. مثال های ریاضی و اینکه چگونه از آن ها استفاده می شود، تحت تأثیر درک ریاضی دانش آموزان قرار دارد. از این رو، انتخاب مثال هایی که بهترین فرصت های یاد گیری

را ارائه میدهند و پسس از آن، پرداختن به این مثالها به شیوهای که به بهترین وجه برای دانش آموزان مناسب باشد، به عهدهٔ معلم ریاضی است [۷]. در ک و تصور معلم ریاضی از مثال و آگاهی از جایگاه آن در آمــوزش و نیز مهــارت او در ارائه و به کار گیری یک مثال آموز شیی، یکی از عاملهای مهم و تأثیر گذار بر فرایند تدریس ریاضی است.

طبق نظر محققان آموزش رياضي، مثالهای آموزشی ریاضی را از نظر فرایند تولید، ماهیت و نوع کاربر دشان می توان در طبقهبندی های متفاوت قرار داد که در این مقاله به بعضي از آنها مي پردازيم.

۱. ردهبندی مثالها با توجه به فرايند يانحوة توليد آنها

دالبرگ و هاسمن (۱۹۹۷، نقل شده در: کثیری، ۱۳۸۸) از منظر نحوهٔ تولید، مثالها را در چهار ردهٔ زیر دســـتهبندی کر دہاند:

مثالهایی که از حافظه فراخوانی مىشوند

اين گونــه مثالهـا معمــولاً اولين مثالهای در دسترس هستند و بدون تفکر زياد در مور د مسئله، وبا تكيه بر محفوظات، بهعنوان اولين جواب ممكن بيان مي شوند. در این مثالها، به دلیل فوریت در ارائه یا عدم تفكر و تمركز كافي، ضريب اشتباه بالاست و همین موضوع، باعث می شود که مثالهای نادرست فراوانی بین آنها دیده شــود. برای نمونه، در بیان مثال برای دو عددی که مجموعشان برابر ۱۰۰ است، ممكن است بلافاصله فقط پاسخ ۵۰+۵۰ داده شود و برای تولید مثالهای بیشتر، توليدكننده پاسخهاي نادرستي ارائه كند.

• مثال هایی کــه متکی بر آزمون و خطاهستند

این نوع مثالها گاهی به اتکای یک رهيافت ساده و آشينا عرضه مي شوند و یادگیرنده، تنها با استفاده از روشهای مبتدى، أن ها را مي سازد. اين گونه مثال ها،

< اعتبار چندانی ندارند و به نتیجه رسیدن یا 🔍 ورود به مطلب، و توضیح چگونگی رشد و نرسيدن أنها بيشتر شانسي است. مثلاً 🕊 توسعهٔ يک ايده به کار ميروند و مي توانند. فرض کنید وقتی از دانش آموز بخواهید دو 🧧 زمینهٔ مناسبی برای ورود به تعریفها عدد مثال بزند که مجموعشان ۱۰۰ باشد، 🔵 و اصول و اســـتنتاجها باشند. ویژگی مهم پاسخهای ۵۰+۵۰، ۱۰+۹۰ یا ۸۰+۲۰ را 🔍 این مثالها آن است که قادرند مفاهیم دریافت کنید. ولی اگر از وی بخواهید دو 💆 اساسی را منتقل کنند، در کشان به آسانی عددی را مثال بزند که هیچ کدام رقم صفر 🖕 و بدون کمک ابزارهای اضافی ممکن است • نداشته باشند، برایش مشکل باشد.

مثالهایی که به وسیلهٔ بازبینی و تغییر یا اصلاح پاسخهای قبلی ارائه مىشوند

خطا به دست میآیند، با این تفاوت که آزمونها با یک رهیافــت ذهنی هدایت می شـوند و مانند حالت قبل شانسـی

نيستند. درواقع، يک مرحلهٔ پيشرفتهتر و سازمان یافته تر از حالت قبل هستند، یک قدم به پاسخ نزدیکترند و با کمی صبر و حوصله به پاسخ درست منتهی می شوند.

مثالهایی که با روشهای نظاموار ا توليدمىشوند

استفاده از یک رهیافت منظم ذهنی در توليد مثالها، نشانهٔ تسلط يادگيرنده بر مفهوم مورد نظر است. با این رویکرد، شخص قادر است چند پاسخ درست یا در بعضی موارد، ردههایی از پاسخهای درست را بيان كند.

۲. ردهبندی مثالها با توجه به ماهيت آنها

ریسلند و میشنر (۱۹۸۷)، واتسون و میسون (۲۰۰۲)، لیز و همکارانـش (۲۰۰۶)، الکوک و انگلیز (۲۰۰۸) و ریسلند (۱۹۹۴، نقل شده در: گدنبرگ و میسون، ۲۰۰۸). چهار دسته مثال به شرح زیر ارائه دادند که دارای اهميت زيادي هستند، ولي الزاماً از هم مجزا نیستند و با هم اشتراک دارند که به هركدام به اختصار مي پردازيم.

مثالهای شروع کننده

این مثالها در ابتدای هر بحث، برای ایجاد انگیزه و تحریک علاقه، شروع و

و قابل تعميم به حالتهاي كلياند. براي نمونه می توان به نمـودار گرافیکی y=x^۲ در تدریس سهمیها اشاره کرد. مثالهای الگویابی که هدفشان کشف یک الگو یا ارائهٔ شواهدی برای قابل قبول بودن یک این مثالها با همان رویکرد آزمون و . ادعاست، در ردهٔ «مثالهای شروعکننده» قرار می گیرند.

• مثالهای مرجع

این مثالها قبلاً آموخته شـدهاند و برای بررسے حدسها یا بازبینی مفاهیم از آنها استفاده می شود و در شکل دهی و توسعهٔ درک و فهم به کار میروند. به آنها بهطور مكرر ارجاع داده مى شود؛ زيرا برای ایجاد ارتباط بین نتایج و مفاهیم، توانایی بالقوه و نقش اساسیی دارند. برای نمونه، |y=|x مثالی از یک تابع پیوسته در مجموع عددهای حقیقی (R) است که در یک نقط_ه از دامنهاش یعنی نقطهٔ صفر، مشتق يذير نيست.

• مثالهای عام

این مثال ها، کلی و انعطاف پذیرند و مانند الگو و مدل هستند و به این دلیل، مثال های کلی و عام نامیده شدهاند. این مثال ها می توانند کلیتی از مفاهیم، رويهها يا اثباتها را نشان دهند و بهعنوان نمایندهای از یک کلاس یا رده به حساب) آیند. **فرودنتال** (۱۹۸۳، نقل شده در: لیز و هم کاران، ۲۰۰۶)، مثال هایی با چنین قابلیتهایی را «پیشالگو» نامیده است. از نظر میسون و پیم (۱۹۸۴) نیز مثالهای عام، بازنماییهای شفافی از موضوعهای کلی هستند که اجازه میدهند شخص یک کلیت را از طریق یک حالت خاص دريافت كند. براي نمونه، انتخاب حرف x و برای نشان دادن مجهول، استفاده از عبارت

۲n برای نشان دادن عددهای زوج، یا به کار بردن ضابطهٔ y=f(x) بردن ضابطهٔ y=f(x) مصداق هایی برای مثال های عام هستند.

• مثال های نقض

این مثال ها برای ایجاد تغییر در قضيهها، تعريفها ونظريهها ونيز براي ردو تكذيب حدسهاو فرضهاى نادرست به كار میروند. پلد و زاسلاوسکی (۱۹۹۷) سه نوع خاص از مثال های نقض را با عنوان «مثالهای نقض خاص» و «مثال های نقض نیمهعمومی» و «مثالهای نقض عمومی یا عام» مشخص و برای هر کدام نمونهای معرفی کردهاند. مثال نقض خاص، مانند عد ۲ در رد این ادعا که «تمامی عددهای اول فرد هستند»، تنها یک مثال در این زمينه است. مثال نقض نيمه عمومي، مانند در رد این ادعا مطرح $\sqrt{18} = \sqrt{18}$ می، شود که «حاصل ضرب دو عدد گنگ همیشه گنگ است» که با ایجاد تغییری در آن (مانند تغییر ۸ به ۱۸)، می توان به مثالهای بیشتری دست یافت. از مثال نقض های عمومی در اغلب موارد برای اثبات نادرستي يك ادعا استفاده مي شود و زمینهٔ تولید مثالهای نقض بیشتری را هم فراهم می کنند.

۳. ردهبندی مثالها با توجه به کاربرد ان ها

بعضى از أموزشــگران رياضي مثالها را در ردههای مطابق با موقعیتهای ویژهٔ اســـتفاده از آنها طبقهبنــدی میکنند. مفاهیم غالباً در ردهبندی اشــیای ریاضی نقش دارند و تعیین اینکه آیا یک شیے، ریاضی به یک رده تعلق دارد یا نه، از طریق درک مفاهیم و مقایسهٔ اشیا با مفاهیم صورت می گیرد.

رولند و زاسلاوسیکی (۲۰۰۵) بین مثالهایی که برای ارائهٔ استدلال و بهويژه نمونههايي از تعميم أورده ميشوند و مثالهایمی که برای ایجاد مهارت در بەكارگىرى رويەھا بـــەكار مىروند، تمايز قائل شـدهاند. از نظر آنان، به دلیل نقشی کے مثال ہے در درک عمیق تر بعضی

مفاهیم دارند، میتوان آنها را بهعنوان تســهیل کنندهٔ در ک و جذب یک مفهوم ردەبندى كرد.

گری و **تال** (۱۹۹۴، نقل شده در: لیز و همکاران، ۲۰۰۶) بر این باورند که از یک مثال می توان در دو جنبهٔ متفاوت رویه و مفهوم استفاده کرد. مثلاً در تابع ۳+۲x=y، معلم ممكن است آن را به عنوان مفهوم يک تابع خطى ارائــه دهد، ولى دانش آموز أن را بهعنوان رویهای برای رسم نمودار تابع خطی در نظر بگیرد. بنابراین از دیدگاه پداگوژیکی، میتوانیم بین مثالهایی از یک مفہوم (از قبیل مثلثها، عددهای صحیح، بخش یذیری بر ۳، و چندجملهها) و مثالهایے از کاربرد یے رویہ (مانند يافتن مساحت يك مثلث، يافتن خارج قسمت یک عدد صحیح بخش یذیر بر ۳ و یافتن ریشههای یک جملهای) تمایز قائل

زیر معرفی می شوند:

مثالهای حل شده

منظـور از «مثالهای حل شـده» مسائلی هستند که دارای حل گام به گاماند، به صورت مرتب و منظم تهیه و تدویـــن شــدهاند و بالقـــوه خودآموز و خودتشريحياند. معمولاً اين گونه مثالها وتوسط آموزشگران يا تهيه كنندگان منابع درسی برای یادگیرندگان طراحی می شوند و دانش آموزان با الگوبرداری از این مثال ها، از آنها در موقعیتهای مشابه استفاده

مى كنند (رايس و رنكل، ۲۰۰۲). از این مثالها به دلیل راه حل گام به گام و تشریح هر گام، میتوان برای معرفی وشرح تکنیکهای خاص به کار گرفته شده استفاده کرد و آنها را بهعنوان نمونه و الگو به یادگیرندگان ارائه داد (آتکینسون و همکاران، ۲۰۰۰).

طی دهههای گذشته استفاده از مثالهای حل شده، توسط آموز شگران ریاضی مورد تأکید قـرار گرفته و تمایل یادگیرندگان به استفاده از مثالهای حل شده، معلوم شده است (رایس و رنکل، • ۲۰۰۲). محققان عقیده دارند که استفادهٔ

کاربرد وسیع مثالها از زمان دور، در متون ریاضی ثبت شده و نشان دهندهٔ اهمیت و اقبال عمومی، نسبت به درک مفاهیم از طریق مثال های آشناست تا از این طریق، تجرید ریاضی ملموس شود

> مناسب از مثالهای حل شده، به شرط درک فرایندها و ارتباطهای موجود، تأثیر بســزایی در آموزش روش حل مسئله و کسب مهارتهای شناختی دارد.

مثالهای تمرینی

به اعتقاد واتسون و میسون (۲۰۰۶) «مثال های تمرینی» بدون حل هســتند، بهعنوان تکلیف بــه یادگیرنده ارائه می شوند و هدفشان ایجاد تبحر حل مسائل در اوست. این مثالها میتوانند یادگیری فراگیرنــدگان را افزایش دهند چند نوع از مثال های کاربردی به شرح 🔵 و بهویژه عملکرد آنان را در حل مسئله سرعت بخشيند، به شرطى كه طراحي و ارائهٔ آنها طوری باشد که فراگیرندگان را به خودتشريحي و خوداستدلالي تشویق کنند (لیز و همکاران، ۲۰۰۶). از مثالهای تمرینے می توان برای امتحان عملک_رد و ارزیاب_ی درک فراگیرندگان استفاده كرد. اين نوع مثالها احتمالاً بايد نسبت به مثالهایی که به منظور بالا بردن قوة تعميم طراحي مي شوند، ساختاري مشکل تر داشته باشند.

• مثال های از پیش طرح شده و مثالهای فی البداهه (فوری)

«مثال های از پیش طراحی شده» مثالهایی هســتند که معلم از قبل آنها را طراحي كرده است، از نحوهٔ اجرايشان آگاهی دارد و قصدش این است که آن مثال ها را با تدريس خود تلفيق كند. بنابراین مثال ای در طراحی تدریس معلمان، متن درسی که برای دانش آموزان آمادہ می کنند، کتاب در سی، منابع تدریس يا گفتهها و فعاليتهاي معلمان ديده می شوند (زودیک و زاسلاوسکی، ۲۰۰۸). در حالی که «مثالهای فی البداهه و فوری»

مثالها در آموزش رياضي فقط به یک فرم از سؤال و یا مثال های کار شده محدود نمی شوند، بلکه در بسیاری موارد بهعنوان توان تفكر مطرح هستند

از قبل طراحی نشدهاند، در لحظه و فوری 🖕 مثالها در تدریبس به دانش آموزان دچار برحسب نياز ساخته مي شوند و انتخابشان - چالش جدى مى كند. مستلزم تصمیم گیری در لحظه است.

درس قابل اســـتفاده و در ارائهٔ دیدگاههای منابع تاريخي رياضي يشتيبان تدريس معلمان 1. Alcock, L. Matthew, I. Doctoral

باشند، مشکلی جدی است. بخشی از این

• مشکل به ماهیت مثال ها یا محدودیتهای

فیزیکی و تاریخی آنها مربوط می شــود

مثالها از عناصر قطعي وغيرقابل انكار

student use of examples in evaduation and provting contiecture, 2008. 2. Goldenberg, P. Mason, J., "Shedding

light on and with example Spaces". Educ Stud Math. 69. 183 - 194, 2008. و همین موضوع معلمان را در اســـتفاده از 🚬

3. Hiebert, J., Gallimore, R. & Stigler, J. W., "A Knowledge Base for the Teaching Profession": What Would It Look Like and How Can We Get One? Educational Researcher.31(5), 2002.

4. Kennedy, M. M., "Knowledge and Teaching, Teachers and Teaching: Theory and Practice". 8(3): 354 - 370, 2002.

Leinhardt, G., "Instructional 5. Explanations: A Commonplace for Teaching and Location for Contrast". In V. Richardson (Ed). Handbook of Research on Mathematics Teaching. 4th ed. Washington DC: American - 357, 2001.

6. Liz.bills. Dreyfus, T. Mason, J. Tsamir, P. Watson, AZaslavsky, O., "Examplification in mathematics Education". Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Prague, Czech Republic:PME, 2006.

7. Rowland, T., "The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics". Educ Stud Math. 69. 149 - 163, 2008.

8. Sulaiman, F & Mohamed, M., "Choosing Mathematical Examples: Teknologi, 63 (2): 45- 50, 2013.

9. Watson, A & Mason, J., "Student -Generated Examples in the Learning of Mathematics". Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education. 2 (2) p 237 - 249, 2002.

Zodik, I. Zaslavsky, 10. "Characteristics of teacher's choice of classroom". Educ Stud Math 69: 165 -182, 2008.

11. Zaslavsky, O & Peled, I., "Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and studentteachers: The case of binary operation". Journal for Research in Mathematics Education, 27 (1), 67 - 78, 1997.

۱۲. کثیری، حسین (۱۳۸۸). نقش مثال در و نشدهٔ آموزش ریاضی. دانشگاه شهید بهشتم. و دانشكدهٔ علوم رياضي.

یک مثال از پیش تعیین شده می تواند 🗢 مثال های نوعی منظور از «مثال نوعی»، مثالی است که چنــد مؤلفهٔ فیالبداهه و فــوری را درون 🚬 خود داشته باشد که معلم هنگام طراحی 🧕 بهصورت نمونهای برای یک مفهوم، در ذهن مثالهای محیط از آنها آگاه نباشد، ولی 🔵 یادگیرنده وجود دارد. در اولین قدم، وی با در تعاملات كلاسي بروز كنندد. عموماً • آن نمونه، درستي يا نادرستي آن مفهوم مثالهاي از پيش طراحي، شده، از منابع 💆 را ميسنجد. اين الگوها بهصورت مستقيم در دسترس معلمان و عمدتاً از کتابهای و بی واسطه (یا شهودی) درک و بهعنوان درسی استخراج می شوند و می توان برای • نمایندهٔ مفهوم و بدون نیاز به تأیید یا • Educational Research Association. 333 سطح خاصبي از دانش آمــوزان يا مثلاً • استدلال خاصي، توسط ياد گيرنده يذير فته به صورت درجه بندی شده آن ها را ارائه کرد. می شوند (تسامیر و همکاران، ۲۰۰۸). البته

این لحظه ها می توانند برای معلمان 🧕 تکیهٔ صرف بر مثال های نوعی محدود کننده فرصتهایے، برای یادگیری باشند و است و امکان دارد تأثیر منفی ناخواستهای یادگیری مزبور به غنی شدن فضای مثال ⁹بر درک مفهومی و تواناییهای استدلالی آنها نیز منجر می شود. از نظر **زودیک </mark>یادگیرندگان بگذارد (فیشباین، ۱۹۹۳).** و **زاسلاوســـکی**، دو هدف عمده و مهم . از کاربــرد مثالهـای فیالبداهه و فوری .

عبار تانداز:

۱. پاسے به اظهارات دانشآموزان، 🕊 مؤثر بر کارامدی فراگیرندگان هستند. از از قبیال ادعاهای نادرست، معمولاً با دانی و یادگیری بیشتر در مورد یک موضوع، 🖕 Routine but Not an Easy Task". Jurnal 🖕 کموضوع، 🕳 مبتنــــی بر امکان دســـتیابی به مثالهای 👝 مثال های نقض؛ ۲. تشریح بیشـــتر مثالهای از پیش • بیشتر، چگونگی ساخت چنین مثالهایی،

طراحي شده و محدوديتها و شرايط أنها. 🥊 تقويت ارتباطهاي داخلي أنها و توسعه محرکها و توانایی دستیابی سریع به

• مثال های تاریخی

مار مثال هاست. بسیاری از فراگیرندگان . O. در بیانیهٔ مشهور ۷۵ نفر از مشهورترین 🔵 مثالها را به منظور توسیعهٔ فضای مثال، ۱ درسی ریاضی دبیرستان منتشر شد و یکی 🖕 بهاصلاح بدفهم مهامی پر دازند،به جنبه های از معتبرترین سندهای تاریخی در زمینهٔ 🦲 جدیدی از درک مفهوم دست مییابند و 🧧 آموزش ریاضی محسوب می شود، آمده ونیز از فضای مثالشان در برقراری ارتباط با . است: «یکی از بزرگترین امتیازها برای • دیگران استفاده می کنند قرار گرفتن یک دانشآموزان هر رشته یا موضوع، خواندن 💆 فضای غنی از مثالها در دسترس معلمها سرگذشت و تاریخچهٔ آن است. زیرا علم می تواند تأثیر قوی و ارزشمندی بر ارائهٔ همیشه هنگامی بهطور کامل ذاتی و حفظ 🔵 مفاهیم و شیوههای بازنمایی آنها داشته 🔵 **آموز شریاضی،** پایان نامهٔ کارشناسی ارشدمنتشر می شود که از نقطهٔ آغازین آن شروع شود» 🤜 باشد. چنین فضایی بهطور غیر مستقیم البته ساختن مثالهایی که در کلاس 🖢 هدایتگر تصور مفهومی است [۶].